自然演繹100題ノック

川井新 *

2022年4月28日

目次

*quawai@me.com

はじめに

数理論理学は、証明図を書く学問では**ない**。論理を、とくに数学で使われる論理を研究する数学の一分野である。そのなかで証明図とは、証明を記号化したものであり、つまり数学の対象として図形のように扱えるようにしている。幾何学が、図形を描く学問でなく、図形について考察する学問であるのと同様なのであろう。

数理論理学の歴史は、大雑把には数学、特にその証明自体を数学的対象として扱うことから始まった。数学的対象として扱うには、命題や証明を記号化して、先に述べたように図形のように扱えるとよい。

さて、本稿では証明図を書く問題を 100 題提出する。先ほど「数理論理学は、証明図を書く学問ではない」と述べたが、では、なぜ 100 題ノックを世に出すのか。それは証明図を書くことに脳のリソースを使わないでいいことで、証明図・証明とは何かを概念的に思考する余裕が生じると考えるからである。

したがって本稿は、数理論理学を学んでいるものの証明図を書くことに苦労を感じ、肝心の理論的な理解に困難を抱える数理論理学の初学者を念頭に書かれている。

証明図を書くには、証明図の定義に従って規則を並べていくことに徹することになる。よってこの問題への唯一のアプローチは、考えないことである。もちろん、シークエント計算で先に証明するとか否定翻訳とかといった難しい問題を解く手法も存在するし、それらを用いて解いてくださっても構わない[1]。しかし、本稿の狙いはあくまでも、考えないでも自然演繹の証明図を書けるようになる点にある。

本稿には、最小命題論理、直観主義命題論理、古典命題論理、古典述語論理の四つの論理体系が出てくる。各章内の「演習」の節では、各体系で証明可能な（メタ）論理式を紹介する。その証明図を書いていただこうという趣旨である。演習問題は四つの体系を合わせて 100 個の論理式からなる。ただし、各章の最初に「例題」という節があり、そこでは典型的な証明図を例示している。

演習問題に対して、「回答例」という章が設けられているが、全ての問題に回答を付しているわけではない。それを求める方向けに、論計舎 `https://ronkeisha.net` で採点・解説をする講座が存在する。また、「例」となっているのは一つの論理式に対して複数の正当な証明図が存在するためである。

[1] そうした手法を紹介する動画や講座を検討している。

0　本稿の手引き

0.1　使い方について

本稿は、問題集であり、自己充足的に self-contained に書かれているわけではない。想定読者は、数理論理学の初学者の中でも基本的な部分を他の本なり講義なりで基礎を修めている方である。したがって、証明図の書き方であるとか非形式的な意義付けなどを求める向きは別の本で補っていただくなり、筆者が代表であるオンライン私塾論計舎で受講していただくなりするとよいだろう。

また、各章の最初にある規則表は目安でしかない。困ったときの参照用程度にしか書かれておらず、規則表だけで数理論理学をマスターできるものではないことをお断りしておく。

最後に読み方についてだが、基本的には iPad をはじめとするタブレットの pdf リーダーで書き込みつつ読むことを想定している。そのために演習は一題につき一頁を費やし空白部分に証明図を書けるようにしたつもりである。もちろん、印刷して下さっても構わない。

0.2　記法について

論理結合子は右結合とする[2]。$\forall$ と $\exists$ および $\neg$、$\vee$ と $\wedge$、$\to$ の順に結合が強いが、可読性のために括弧を補うことがある。例えば、$((\exists x(\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)) \to (\neg(\forall x(\alpha \vee \beta)) \to (\gamma \to \delta)))$ は $\exists x \neg\alpha \wedge \neg\beta \to \neg\forall x(\alpha \vee \beta) \to \gamma \to \delta$ となる。

また、意味上は文字を変えた方がわかりやすい論理式についても、考えないという原則のために出現する順に $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ と辞書式順序にしていることがある。

さらに、全ての仮定は解消されている discharged ことを前提としている。したがって、解消は明示されていない。

また規則の名前も略称のみを載せている。各自調べられたい。

四章で A は 0 変数述語記号、P, Q は 1 変数述語記号、R は 2 変数述語記号とする。

[2]若干慣習と異なる。

1　最小命題論理

本章では、最小命題論理を扱う。聞きなれない体系かもしれないが、実際に本稿で出てくる体系の中で最も歴史が浅い体系であろう。最小命題論理は、直観主義命題論理から否定を除いた体系で、いわば論理とは何かを考察するにあたって再構成された体系である。なお、最小命題論理は、単純型付ラムダ計算に Curry–Howard 対応することが知られている。

1.1　規則表

$$\dfrac{\varphi_0 \qquad \varphi_1}{\varphi_0 \land \varphi_1}\ (\land\text{-I}) \qquad\qquad \dfrac{\varphi_0 \land \varphi_1}{\varphi_i}\ (\land_i\text{-E})$$

$$\dfrac{\varphi_i}{\varphi_0 \lor \varphi_1}\ (\lor_i\text{-I}) \qquad\qquad \dfrac{\varphi_0 \lor \varphi_1 \qquad \begin{matrix}\Pi_0\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\lor\text{-E})$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to\text{-I}) \qquad\qquad \dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to\text{-E})$$

規則 $(\lor\text{-E})$ の Π_0 中に仮定 φ_0 や Π_1 中に仮定 φ_1 が出現していたら、この規則の適用時に解消 discharge する。

規則 $(\to\text{-I})$ の Π 中に仮定 φ が出現していたら、この規則の適用時に解消する。

解消された仮定はもはや仮定と見なされない。なお、出現していない仮定を用いてもよい。例えば、例題 1.2 を参照せよ。

また、解消の順序は問われない。例題 1.4 と演習 1.5 を比較せよ。

1.2　例題

例題 1.1

論理式 $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$ は最小命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \to \gamma \qquad \alpha}{\beta \to \gamma}\ (\to\text{-E}) \qquad \dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\ (\to\text{-E})}{\gamma}\ (\to\text{-E})}{\alpha \to \gamma}\ (\to\text{-I})}{(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\ (\to\text{-I})}{(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\ (\to\text{-I})$$

例題 1.2

論理式 $\alpha \to \beta \to \alpha$ は最小命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}\,(\to\text{-I})}{\alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to\text{-I})$$

例題 1.3

論理式 $\alpha \to \alpha \vee \beta$ は最小命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\,(\vee_0\text{-I})}{\alpha \to \alpha \vee \beta}\,(\to\text{-I})$$

例題 1.4

論理式 $\alpha \vee \beta \to (\alpha \to \beta) \to \beta$ は最小命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vee \beta \qquad \dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\,(\to\text{-E}) \qquad \beta}{\beta}\,(\vee\text{-E})}{(\alpha \to \beta) \to \beta}\,(\to\text{-I})}{\alpha \vee \beta \to (\alpha \to \beta) \to \beta}\,(\to\text{-I})$$

例題 1.5

論理式 $\alpha \to \beta \to (\alpha \vee \beta) \to \beta$ は最小命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vee \beta \qquad \dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\,(\to\text{-E}) \qquad \beta}{\beta}\,(\vee\text{-E})}{(\alpha \vee \beta) \to \beta}\,(\to\text{-I})}{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta) \to \beta}\,(\to\text{-I})$$

例題 1.6

論理式 $\alpha \to \alpha \wedge \alpha$ は最小命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \alpha}{\alpha \wedge \alpha}\,(\wedge\text{-I})}{\alpha \to \alpha \wedge \alpha}\,(\to\text{-I})$$

1.3 演習

演習 1

$(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$

演習 2

$(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \beta$

演習 3

$(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma$

演習 4

$\alpha \wedge \beta \to \beta$

演習 5

$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \to (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

<u>演習 6</u>

$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \to \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

演習 7

$((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$

演習 8

$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

演習 9

$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \to (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

演習 10

$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \to \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$

2　直観主義命題論理

本章では、直観主義命題論理を扱う。直観主義命題論理は、最小命題論理に $\perp$ 記号とその規則 (abs) を加えた拡大である。$\perp$ はキモチの上では、エラーと解釈でき、従って $\perp$ に関する規則 (abs) は証明を進めるうちにエラーに遭遇したときの対応を意図している。

また、節 2.2 および 2.3 で現れる $\neg$ という論理記号は否定を意味する。すなわち、$\neg\alpha$ は「α でない」という意味である。これは $\alpha \to \perp$ の略記として定義される。エラーを引き起こすような命題は成立しないというキモチと解していただいて構わない。

なお、節 2.3 は最小命題論理では証明不可能な論理式からなるわけではない。いっそう正確には、演習問題のいくつかは規則 (abs) を用いずに示せる、となる。

2.1　規則表

$$\frac{\varphi_0 \qquad \varphi_1}{\varphi_0 \land \varphi_1}\ (\land\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\varphi_0 \land \varphi_1}{\varphi_i}\ (\land_i\text{-E})$$

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_0 \lor \varphi_1}\ (\lor_i\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\varphi_0 \lor \varphi_1 \qquad \begin{matrix}\Pi_0\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\lor\text{-E})$$

$$\frac{\begin{matrix}\Pi\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to\text{-E})$$

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\text{abs})$$

規則 ($\lor$-E) の Π_0 中に仮定 φ_0 や Π_1 中に仮定 φ_1 が出現していたら、この規則の適用時に解消する。

規則 ($\to$-I) の Π 中に仮定 φ が出現していたら、この規則の適用時に解消する。

規則 (abs) において、φ は任意の論理式である。

否定を含む論理式であっても必ずしも規則 (abs) を用いるわけではない。演習 2.1 と演習 2.2 を比較せよ。

2.2 例題

例題 2.1

論理式 $\alpha \to \neg\neg\alpha$ は直観主義命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \bot \qquad \alpha}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\neg\alpha}\,(\to\text{-I})}{\alpha \to \neg\neg\alpha}\,(\to\text{-I})$$

例題 2.2

論理式 $(\neg\alpha \lor \beta) \to \alpha \to \beta$ は直観主義命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \lor \beta \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\alpha \qquad \alpha}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\beta}\,(\text{abs}) \qquad \beta}{\beta}\,(\lor\text{-E})}{\alpha \to \beta}\,(\to\text{-I})}{(\neg\alpha \lor \beta) \to \alpha \to \beta}\,(\to\text{-I})$$

例題 2.3

論理式 $\neg(\alpha \land \beta) \to \neg\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta)$ は直観主義命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \land \beta) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \land \beta}\,(\land\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\beta}\,(\to\text{-I})}{\neg\alpha \lor \neg\beta}\,(\lor_1\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\alpha}\,(\to\text{-I})}{\neg\alpha \lor \neg\beta}\,(\lor_0\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta)}\,(\to\text{-I})}{\neg(\alpha \land \beta) \to \neg\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta)}\,(\to\text{-I})$$

2.3 演習

演習 11

$\neg(\alpha \land \neg\alpha)$

演習 12

$\neg\alpha \vee \neg\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)$

演習 13

$\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha \wedge \neg\beta$

演習 14

$\neg\alpha \land \neg\beta \to \neg(\alpha \lor \beta)$

演習 15

$\perp \to \alpha$

演習 16

$(\neg\alpha \wedge \alpha) \rightarrow \beta$

演習 17

$(\neg\gamma \land (\alpha \land \beta)) \land (\alpha \land (\beta \land \gamma)) \to (\neg\neg(\alpha \land \beta) \land \gamma) \lor (\neg(\alpha \land \beta) \land \neg\gamma)$

演習 18

$(\alpha \land \beta) \to (\alpha \lor \beta)$

演習 19

$\alpha \to \neg\neg\alpha \wedge (\perp \to \neg\alpha)$

演習 20

$\neg\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$

演習 21

$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \alpha \to \gamma$

演習 22

$\neg\alpha \to \alpha \to \beta$

演習 23

$\neg\neg((\neg\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \to \alpha)$

演習 24

$(\alpha \to \beta) \to \neg\beta \to \neg\alpha$

演習 25

$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg(\beta \to \alpha)$

演習 26

$(\alpha \land \beta \to \gamma) \to \alpha \to \beta \to \gamma$

演習 27

$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \neg\neg\alpha$

演習 28

$\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$

演習 29

$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\beta \to \alpha) \to \delta) \to \neg\neg(\gamma \lor \delta)$

演習 30

$(\alpha \to \gamma) \land (\beta \to \neg\gamma) \to \neg(\alpha \land \beta)$

3　古典命題論理

本章では、古典命題論理を扱う。古典命題論理は、直観主義命題論理に二重否定除去規則 (DN) を付け加えた体系である。

最小命題論理の自然演繹が I で表される導入規則と E で表される除去規則からなる中、古典命題論理の自然演繹はこのような対称性を著しく欠く。直観主義命題論理において規則 (abs) は $\perp$ の除去規則とみなすことも可能であるが、規則 (DN) は複数の論理記号が出現する点において自然演繹における例外的な規則である。

なお 2 章と同様に、演習 3.3 には、直観主義命題論理で証明可能な、つまり規則 (DN) を用いないで証明図を書ける論理式が含まれている。

3.1　規則表

$$\dfrac{\varphi_0 \qquad \varphi_1}{\varphi_0 \wedge \varphi_1}\ (\wedge\text{-I}) \qquad\qquad \dfrac{\varphi_0 \wedge \varphi_1}{\varphi_i}\ (\wedge_i\text{-E})$$

$$\dfrac{\varphi_i}{\varphi_0 \vee \varphi_1}\ (\vee_i\text{-I}) \qquad\qquad \dfrac{\varphi_0 \vee \varphi_1 \qquad \begin{matrix}\Pi_0\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\vee\text{-E})$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to\text{-I}) \qquad\qquad \dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to\text{-E})$$

$$\dfrac{\perp}{\varphi}\ (\text{abs})$$

$$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\text{DN})$$

規則 ($\vee$-E) の Π_0 中に仮定 φ_0 や Π_1 中に仮定 φ_1 が出現していたら、この規則の適用時に解消する。

規則 ($\to$-I) の Π 中に仮定 φ が出現していたら、この規則の適用時に解消する。

規則 (abs) において、φ は任意の論理式である。

3.2 例題

例題 3.1

論理式 $\neg\neg\alpha \to \alpha$ は古典命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\,(\mathrm{DN})}{\neg\neg\alpha \to \alpha}\,(\to\text{-I})$$

例題 3.2

論理式 $(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha \lor \beta$ は古典命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha \lor \beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha \lor \beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\,(\to\text{-E})}{\neg\alpha \lor \beta}\,(\lor_1\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\alpha}\,(\to\text{-I})}{\neg\alpha \lor \beta}\,(\lor_0\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\neg(\neg\alpha \lor \beta)}\,(\to\text{-I})}{\neg\alpha \lor \beta}\,(\mathrm{DN})}{(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha \lor \beta}\,(\to\text{-I})$$

例題 3.3

論理式 $\neg(\alpha \land \beta) \to \neg\alpha \lor \neg\beta$ は古典命題論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \land \beta) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \land \beta}\,(\land\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\beta}\,(\to\text{-I})}{\neg\alpha \lor \neg\beta}\,(\lor_1\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\alpha}\,(\to\text{-I})}{\neg\alpha \lor \neg\beta}\,(\lor_0\text{-I})}{\bot}\,(\to\text{-E})}{\neg\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta)}\,(\to\text{-I})}{\neg\alpha \lor \neg\beta}\,(\mathrm{DN})}{\neg(\alpha \land \beta) \to (\neg\alpha \lor \neg\beta)}\,(\to\text{-I})$$

3.3 演習

<u>**演習** 31</u>

$\neg\alpha \vee \alpha$

演習 32

$\neg\neg\alpha \vee \neg\alpha$

演習 33

$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

演習 34

$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\beta \to \alpha) \to \delta) \to \gamma \vee \delta$

演習 35

$(\neg\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha) \to \alpha$

演習 36

$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \beta \to \alpha$

演習 37

$((\alpha \wedge \beta \to \gamma) \to \alpha \wedge \beta) \to \alpha \wedge \beta$

演習 38

$((\alpha \vee \beta \to \alpha \wedge \beta) \to \alpha \vee \beta) \to \alpha \vee \beta$

演習 39

$(\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$

演習 40

$\neg\alpha \lor (\beta \lor (\beta \to \alpha))$

演習 41

$(\alpha \to \beta) \vee \alpha$

演習 42

$(\alpha \wedge \beta \to \alpha \vee \beta) \vee (\alpha \vee \beta \to \alpha \wedge \beta)$

演習 43

$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

演習 44

$(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$

演習 45

$\alpha \vee \neg(\alpha \wedge \beta)$

演習 46

$(\alpha \wedge \beta \to \alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \alpha \vee \beta) \vee (\beta \to \alpha \vee \beta)$

演習 47

$(\alpha \wedge \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma)$

演習 48

$(\neg\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)) \rightarrow \alpha$

演習 49

$(\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \beta) \to \beta$

演習 50

$((\alpha \land \beta) \lor \neg\alpha) \to \alpha \to \beta$

演習 51

$(\alpha \land \neg\beta \to \neg\gamma) \to \alpha \land \gamma \to \beta$

演習 52

$\alpha \vee \neg\alpha \to \beta \vee \neg(\alpha \wedge \beta)$

演習 53

$(\alpha \land \beta \to \gamma) \to \alpha \to \beta \to \gamma$

演習 54

$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to \alpha \land \beta \to \gamma$

演習 55

$(\neg\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \beta) \to \beta$

演習 56

$\alpha \vee (\alpha \to (\beta \vee (\beta \to (\gamma \to (\gamma \to \delta \vee \neg\delta)))))$

演習 57

$((\neg\neg\alpha \to \alpha) \to (\alpha \vee \neg\alpha)) \to \neg\neg\alpha \vee \neg\alpha$

演習 58

$(\neg\alpha \to \beta \lor \gamma) \to (\neg\alpha \to \beta) \lor (\neg\alpha \to \gamma)$

演習 59

$(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$

演習 60

$(\alpha \vee \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$

4　古典述語論理

本章では、古典述語論理を扱う。

本章の狙いは、量化記号 ∀ および ∃ に習熟するところにある。量化の扱いは、代入という操作によって実現されている。代入の細かい定義については各自が所有のテキストに委ねるとして、表記法にのみ断りをしておく。$\varphi[x \leftarrow t]$ で「φ 中の代入可能な x に t を代入した結果」を表す。

また、述語論理は本来なら文法すなわち論理式の成り立ちから異なるが、その差異を無視しても十分に読者は理解可能と思われる。

なお、直観主義述語論理と古典述語論理の間にある証明可能性のギャップは、興味深い対象であるが、本稿で直観主義述語論理を扱うことはない。それには Kripke モデルなどより多くの話題を必要とするからである。稿を改めて扱うことができたら本望である。

4.1　規則表

$$\frac{\varphi_0 \qquad \varphi_1}{\varphi_0 \land \varphi_1}\ (\land\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\varphi_0 \land \varphi_1}{\varphi_i}\ (\land_i\text{-E})$$

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_0 \lor \varphi_1}\ (\lor_i\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\varphi_0 \lor \varphi_1 \qquad \begin{matrix}\Pi_0\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\lor\text{-E})$$

$$\frac{\dfrac{\Pi}{\psi}}{\varphi \to \psi}\ (\to\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to\text{-E})$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ (\text{abs})$$

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\text{DN})$$

$$\frac{\begin{matrix}\Pi\\ \varphi[x \leftarrow y]\end{matrix}}{\forall x\varphi}\ (\forall\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\forall x\varphi}{\varphi[x \leftarrow t]}\ (\forall\text{-E})$$

$$\frac{\varphi[x \leftarrow t]}{\exists x\varphi}\ (\exists\text{-I}) \qquad\qquad \frac{\exists x\varphi \qquad \begin{matrix}\Pi\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\exists\text{-E})$$

規則 (∨-E) の Π_0 中に仮定 φ_0 や Π_1 中に仮定 φ_1 が出現していたら、この規則の適用時に解消する。

規則 (→-I) の Π 中に仮定 φ が出現していたら、この規則の適用時に解消する。

規則 (abs) において、φ は任意の論理式である。

規則 ($\forall$-I) で、y は Π 中の解消されてない仮定の中にも $\forall x\varphi$ の中にも自由出現しない変数記号で、φ 中の x に代入可能なものである。

規則 ($\forall$-E) で、x は変数記号であり、t は φ 中の x に代入可能な項である。

規則 ($\exists$-I) で、x は変数記号であり、t は φ 中の x に代入可能な項である。

規則 ($\exists$-E) の適用の際、Π 内に仮定 $\varphi[y \leftarrow x]$ があれば解消する。さらに x は変数記号であり、y は Π 中の $\varphi[y \leftarrow x]$ 以外の解消されていない仮定の中にも $\exists x\varphi$ や ψ の中にも自由出現しない変数記号で、φ 中の x に代入可能なものである。

4.2 例題

以下、A は 0 変数述語記号、P, Q は 1 変数述語記号、R は 2 変数述語記号とする。

例題 4.1

論理式 $\forall x P(x) \to \forall z P(z)$ は古典述語論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)}{P(y)}\,(\forall\text{-E})}{\forall z P(z)}\,(\forall\text{-I})}{\forall x P(x) \to \forall z P(z)}\,(\to\text{-I})$$

例題 4.2

論理式 $\forall x(\alpha \to \beta) \to \exists x\alpha \to \exists x\beta$ は古典述語論理で証明可能である。この論理式の証明図は例えば以下である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\alpha \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\alpha \to \beta)}{(\alpha \to \beta)[x \leftarrow y]}\,(\forall\text{-E}) \qquad \alpha[x \leftarrow y]}{\beta[x \leftarrow y]}\,(\to\text{-E})}{\exists x\beta}\,(\exists\text{-I})}{\exists x\beta}\,(\exists\text{-E})}{\exists x\alpha \to \exists x\beta}\,(\to\text{-I})}{\forall x(\alpha \to \beta) \to \exists x\alpha \to \exists x\beta}\,(\to\text{-I})$$

4.3 演習

演習 61

$\forall x(\bot \to \bot)$

演習 62

$\exists x \alpha \to \exists y(\alpha[x \leftarrow y])$

演習 63

$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

演習 64

$\forall x(A \to P(x)) \to A \to \forall x P(x)$

演習 65

$\forall x \alpha \to \alpha[x \leftarrow t]$

演習 66

$\alpha[x \leftarrow t] \to \exists x \alpha$

演習 67

$\forall x(P(x) \to A) \to \exists x P(x) \to A$

演習 68

$A \wedge \exists x P(x) \to \exists x (A \wedge P(x))$

演習 69

$\exists x(A \wedge P(x)) \to A \wedge \exists x P(x)$

演習 70

$A \land \forall x P(x) \to \forall x(A \land P(x))$

演習 71

$\forall x \forall y \alpha \to \forall y \forall x \alpha$

演習 72

$\forall x \neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\forall x \alpha$

演習 73

$\neg\neg\forall x \alpha \to \forall x \neg\neg\alpha$

演習 74

$\exists x \neg\neg\alpha \to \neg\neg\exists x \alpha$

演習 75

$\neg\neg\exists x\alpha \rightarrow \exists x\neg\neg\alpha$

演習 76

$\forall x(\alpha \land \beta) \to \forall x\alpha \land \forall x\beta$

演習 77

$\forall x \alpha \land \forall x \beta \rightarrow \forall x(\alpha \land \beta)$

演習 78

$\exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$

演習 79

$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$

演習 80

$\exists x(\alpha \lor \beta) \to \exists x\alpha \lor \exists x\beta$

演習 81

$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \rightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$

演習 82

$\alpha \wedge \exists x \beta \rightarrow \exists x(\alpha \wedge \beta)$

x は α に自由出現しないとする。

演習 83
$\forall x(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \forall x\beta$
x は α に自由出現しないとする。

演習 84

$(\alpha \to \forall x \beta) \to \forall x(\alpha \to \beta)$

x は α に自由出現しないとする。

演習 85

$\forall x(\alpha \to \beta) \to \exists x\alpha \to \beta$

x は β に自由出現しないとする。

演習 86

$\forall x \neg \alpha \to \neg \exists x \alpha$

演習 87

$\neg \exists x \alpha \to \forall x \neg \alpha$

演習 88

$\exists x \neg \alpha \to \neg \forall x \alpha$

演習 89

$\neg\forall x\alpha \rightarrow \exists x\neg\alpha$

演習 90

$\forall x \exists y (P(x) \land Q(y)) \to \exists y \forall x (P(x) \land Q(y))$

演習 91

$\exists y \forall x (P(x) \land Q(y)) \to \forall x \exists y (P(x) \land Q(y))$

演習 92

$\forall x \exists y (P(x) \lor Q(y)) \to \exists y \forall x (P(x) \lor Q(y))$

演習 93

$\exists y \forall x (P(x) \vee Q(y)) \rightarrow \forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$

演習 94

$\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow \exists z R(z,z)$

演習 95

$\exists x R(x, x) \to \exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y))$

演習 96
$\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$

演習 97

$\exists x(\exists y P(y) \to P(x))$

演習 98

$\neg\forall x(\neg\forall y\neg P(y) \land P(x))$

演習 99

$\forall x \forall y(P(x) \land R(x, y)) \lor \forall x \forall y(Q(y) \land R(x, y)) \to \forall x \forall y((P(x) \land Q(y)) \lor R(x, y))$

演習 100

$\forall x(\alpha \vee \beta) \to \forall x \alpha \vee \beta$

x は β に自由出現しないとする。

5　回答例

演習 7 の回答例

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\alpha \lor \beta) \land (\alpha \to \beta)$}
\UnaryInfC{$\alpha \lor \beta$}
\AxiomC{$(\alpha \lor \beta) \land (\alpha \to \beta)$}
\UnaryInfC{$\alpha \to \beta$}
\AxiomC{α}
\BinaryInfC{β}
\AxiomC{β}
\TrinaryInfC{β}
\UnaryInfC{$((\alpha \lor \beta) \land (\alpha \to \beta)) \to \beta$}
\end{prooftree}
$$

演習 17 の回答例

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\neg\gamma \land \alpha \land \beta) \land (\alpha \land \beta \land \gamma)$}
\UnaryInfC{$\neg\gamma \land \alpha \land \beta$}
\UnaryInfC{$\neg\gamma$}
\AxiomC{$(\neg\gamma \land \alpha \land \beta) \land (\alpha \land \beta \land \gamma)$}
\UnaryInfC{$\alpha \land \beta \land \gamma$}
\UnaryInfC{$\beta \land \gamma$}
\UnaryInfC{γ}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(abs)}
\UnaryInfC{$\neg(\alpha \land \beta)$}
\AxiomC{$(\neg\gamma \land \alpha \land \beta) \land (\alpha \land \beta \land \gamma)$}
\UnaryInfC{$\neg\gamma \land \alpha \land \beta$}
\UnaryInfC{$\neg\gamma$}
\BinaryInfC{$\neg(\alpha \land \beta) \land \neg\gamma$}
\UnaryInfC{$((\neg\neg(\alpha \land \beta) \land \gamma) \lor (\neg(\alpha \land \beta) \land \neg\gamma)$}
\UnaryInfC{$(\neg\gamma \land \alpha \land \beta) \land (\alpha \land \beta \land \gamma) \to (\neg\neg(\alpha \land \beta) \land \gamma) \lor (\neg(\alpha \land \beta) \land \neg\gamma)$}
\end{prooftree}
$$

演習 21 の回答例

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\alpha \to \neg\beta$}
\AxiomC{α}
\BinaryInfC{$\neg\beta$}
\AxiomC{$\alpha \to \beta$}
\AxiomC{α}
\BinaryInfC{β}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(abs)}
\UnaryInfC{γ}
\UnaryInfC{$\alpha \to \gamma$}
\UnaryInfC{$(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha \to \gamma$}
\UnaryInfC{$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \alpha \to \gamma$}
\end{prooftree}
$$

演習 33 の回答例

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha)$}
\AxiomC{$(\alpha \to \beta) \to \alpha$}
\AxiomC{$\neg(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha)$}
\AxiomC{α}
\UnaryInfC{$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha$}
\AxiomC{α}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(abs)}
\UnaryInfC{β}
\UnaryInfC{$\alpha \to \beta$}
\BinaryInfC{α}
\UnaryInfC{$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha)$}
\RightLabel{(DN)}
\UnaryInfC{$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$}
\end{prooftree}
$$

演習 40 の回答例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\beta\vee(\beta\to\alpha) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\beta\vee(\beta\to\alpha) \quad \dfrac{\beta}{\beta\vee(\beta\to\alpha)}}{\bot}}{\neg\beta} \quad \beta}{\bot}}{\alpha}\,(\mathrm{abs})}{\beta\to\alpha}}{\beta\vee(\beta\to\alpha)}}{\bot}}{\neg\neg(\beta\vee(\beta\to\alpha)}}{\beta\vee(\beta\vee(\beta\to\alpha)}\,(\mathrm{DN})}{\neg\alpha\vee(\beta\vee(\beta\to\alpha)}$$

演習 57 の回答例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\beta\vee\neg(\alpha\wedge\beta)) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\beta\vee\neg(\alpha\wedge\beta)) \quad \dfrac{\beta}{\beta\vee\neg(\alpha\wedge\beta)}}{\bot}}{\neg\beta} \quad \dfrac{\alpha\wedge\beta}{\beta}}{\bot}}{\neg(\alpha\wedge\beta)}}{\beta\vee\neg(\alpha\wedge\beta)}}{\bot}}{\neg\neg(\beta\vee\neg(\alpha\wedge\beta))}}{\beta\vee\neg(\alpha\wedge\beta)}\,(\mathrm{DN})}{\alpha\vee\neg\alpha\to\beta\vee\neg(\alpha\wedge\beta)}$$

演習 74 の回答例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\alpha \quad \dfrac{\exists\neg\neg\alpha \quad \dfrac{\dfrac{\neg\neg\alpha[x\leftarrow t]}{\alpha[x\leftarrow t]}}{\exists\alpha}}{\exists x\alpha}\,(\exists\text{-E})}{\bot}}{\neg\neg\exists x\alpha}}{\exists x\neg\neg\alpha\to\neg\neg\exists x\alpha}$$

演習 88 の回答例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\neg\alpha \quad \neg\alpha[x\leftarrow t]}{\neg\alpha[x\leftarrow t]}\,(\exists\text{-E}) \quad \dfrac{\forall x\alpha}{\alpha[x\leftarrow t]}\,(\forall\text{-E})}{\bot}}{\neg\exists x\neg\alpha} \quad \exists x\neg\alpha}{\bot}}{\neg\forall x\alpha}}{\exists x\neg\alpha\to\neg\forall x\alpha}$$

演習 95 の回答例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x))}{\forall y (R(u,y) \wedge R(y,u))}}{R(u,u) \wedge R(u,u)}}{R(u,u)}\ (\wedge_0\text{-E})}{\exists z R(z,z)}\ (\exists\text{-I})}{\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x)) \to \exists z R(z,z)}$$

演習 100 の回答例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\alpha \vee \beta)}{(\alpha \vee \beta)[x \leftarrow u]} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha[x \leftarrow u]}{\forall x \alpha}}{\forall x \alpha \vee \beta} \qquad \dfrac{\beta[x \leftarrow u]}{\forall x \alpha \vee \beta}}{\forall x \alpha \vee \beta}}{\forall x(\alpha \vee \beta) \to \forall x \alpha \vee \beta}$$

おわりに

本稿では、最小命題論理、直観主義命題論理、古典命題論理、古典述語論理の証明図を書く問題を合わせて 100 題を紹介した。単に 100 個の証明可能な論理式を出題しただけでなく、各体系間の証明能力の違いを結果的にや体系の性格を意識できるように苦心して論理式を選択した。特に、Hilbert 流の証明論の公理との対応、否定概念の取り扱い、直観主義命題論理と古典命題論理の間に成立する Glivenko の定理、古典論理の双対性などは、読者も意識したところだと愚考する。そうした注意が、読者の証明図を書く苦労を取り除いただけなく概念的な理解にも寄与したなら、執筆も報われるであろう。

なお、本稿に現れる一階述語論理の論理式の多くが、実効的に証明可能である。実際にはそのかぎりでなく、一階述語論理は決定不可能であると知られている。つまり、論理式が与えられたときにそれが一階述語論理の定理の集合に入っているかを判定するアルゴリズムは存在しない。こうした発展的な話題は、本稿の範囲を超えている。

執筆を思いついたきっかけは次の通りである。筆者は、『現代数理論理学序説』[3] ではじめて数理論理学に触れたが、当該書は直感的な説明を廃し実際に証明図から証明まで手を動かすことで、数理論理学への習熟を促していた。世に多くの数理論理学の入門書はあり、それは数学科の学生や院生などの数学者向けのものから哲学や言語学など分析の対象や道具として数理論理学を用いる学問に関わる人へ向けたものまで、その想定読者も多岐にわたる。しかし、先に述べたような『現代数理論理学序説』のようなアプローチの本はまれであり、当の文献が事実上の絶版である今、筆者の試みが世にある入門書を補うことができるだろう、と。

なお本稿を執筆する際に、[3] 以外に [2] と [1] が主に参考になった。というのも両書こそ念頭においていた「入門書」の代表例だからである。それより先に進もうという向きには、[4] が包括的な和書として存在することをお知らせしよう。

最後に、原稿を確認し、助言を下さった方々に感謝を申し上げる。

参考文献

[1] 戸次大介. 数理論理学. 東京大学出版会, 2012.

[2] 鹿島亮. 数理論理学. 朝倉書店, 2009.

[3] 古森雄一, 小野寛晰. 現代数理論理学序説. 日本評論社, 2010.

[4] 新井敏康. 数学基礎論 増補版. 東京大学出版会, 2021.

【論計舎について】

数理論理学と計算機科学を主軸としたオンライン私塾。
一方的な講義形式でなく、
話的な学びをオンライン上で提供する。

【川井新について】

論計舎主催・講師。
論理と計算の関わりに関心をもち、研究者として活動中。
RIMS 共同研究にて口頭発表 2 回。
指導実績のある分野に、線形代数、微分積分学、数理論理学。
ウィスキーと珈琲を好む。

自然演繹 100 題ノック

発行日	2022 年 02 月 27 日	(初版)
発行元	論計舎	
発行元 Twitter ID	@ronke1sha	
発行元 web サイト	`https://ronkeisha.net`	
発行者	川井新	
発行者 Twitter ID	@squawai	